第28卷 第1期 工 程 数 学 学 报 Vol. 28 No. 1
2011年02月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Feb. 2011

文章编号:1005-3085(2011)01-0075-06

具有病毒感染的Holling-Tanner捕食-食饵模型的定性分析*

王治国， 李 博， 吴建华†

(陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062)

摘 要: 利用稳定性理论，讨论了一类带扩散项食饵染病的捕食-食饵模型正常数解的一致渐近稳定性，得出一定条件下，在常数解的某个邻域内系统不存在非常数正解的结论．同时，利用极值原理和分歧理论，研究了正平衡解的上下界估计和非常数正解的存在性．文中的结果表明，在一定的条件下，受病毒影响的捕食，食饵种群是可以共存的．

关键词: 渐近稳定；平衡态；分歧

分类号: AMS(2000) 35J57 **中图分类号**: O175.26 **文献标识码**: A

1 引言

本文主要研究一类带扩散项食饵染病的Holling-Tanner捕食-食饵模型

$$\begin{cases} -d_1\Delta S = S(1-S) - \frac{SP}{a+S+I} - \lambda SI = G_1(U), & x\in\Omega, \quad t>0, \\ -d_2\Delta I = \lambda SI - \frac{\eta IP}{a+S+I} - \gamma I = G_2(U), & x\in\Omega, \quad t>0, \\ -d_3\Delta P = P[\delta - \frac{\beta P}{S+I}] = G_3(U), & x\in\Omega, \quad t>0, \\ \partial_\nu S = \partial_\nu I = \partial_\nu P = 0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中S, I, P分别代表易感染食饵，已感染食饵和捕食者种群；Ω为R^n中具有光滑边界的有界开区域$U=(S,I,P)$；参数a, λ, β, η, δ均为正常数．模型(1)的生物背景和各参数的生物意义，可参见文献[1]．

2 常数解的稳定性

文献[1]中命题3指出，参数λ, η, γ, δ, β满足条件

$$\lambda\eta > \eta+\lambda, \quad \delta>\delta^*, \quad \gamma<\gamma^*, \quad \widetilde{S} < \frac{\eta+\gamma}{\eta+\lambda} \tag{2}$$

时，式(1)有唯一正常数解$\widetilde{U}=(\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{P})$($\widetilde{U}$依赖于上述参数)，其具体形式以及$\delta^*$, γ^*，可参见文献[1]．记正常数解存在时参数满足的上述条件为H_1．

收稿日期: 2009-03-04. **作者简介**: 王治国(1977年1月生)，男，博士．研究方向：偏微分方程.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10571115)；教育部高等学校博士点基金(200807180004)；陕西省自然科学基础研究资助项目(2007A11).

†**通讯作者**: 吴建华 E-mail: jianhuaw@snnu.edu.cn

引理 1[1] H_1 成立时，若参数 $\lambda, \eta, \gamma, \delta, \beta$ 满足 $(a), (b), (c), (d)$ 四个条件时，(1) 的唯一正解 $\widetilde{U}=(\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{P})$ 是局部渐近稳定的.

$(a), (b), (c), (d)$ 参见文献 [1]，并记这四个条件为 H_2. 结合引理 1 可证如下定理.

定理 1 参数 $\lambda, \eta, \gamma, \delta, \beta$ 满足条件 H_1, H_2. 若 $d_1=d_2=d_3$，则 (1) 的唯一正常数解 $\widetilde{U}$ 是一致渐近稳定的.

令 $G(U)=(G_1(U),G_2(U),G_3(U))$，矩阵 $G_U(\widetilde{U})$ 的元素 a_{ij} 的具体形式参见文献 [1]，其中

$$a_{33}=\delta-\frac{2\beta\widetilde{P}}{\widetilde{S}+\widetilde{I}}=-\delta<0.$$

3 先验估计

由极值原理[2] 易证得如下定理.

定理 2 (上界估计) 对于 (1) 的任意正解 $U=(S,I,P)$ 都有

$$\max_{\bar{\Omega}} S\le 1,\quad \max_{\bar{\Omega}} I\le \frac{d_1}{d_2}+\frac{1}{4\gamma},\quad \max_{\bar{\Omega}} P\le \frac{\delta(1+\frac{d_1}{d_2}+\frac{1}{4\gamma})}{\beta}.$$

定理 3 (下界估计) 用 Λ 代表参数 $\lambda, \eta, \gamma, \delta, \beta$，固定 Λ, d，设 $d_1>d$, $d_2>d$, $d_3>d$. 若 $d_1=d_2$ 且 $\lambda(\frac{d_1}{d_2}+\frac{1}{4\gamma})<1$，则存在正常数 $\underline{C}=\underline{C}(\Lambda,d)$，使得对于 (1) 的任意正解都有

$$\min_{\bar{\Omega}} S>\underline{C},\quad \min_{\bar{\Omega}} P>\underline{C}.$$

证明 令

$$C_1(x)=\Big((1-S)-\frac{P}{a+S+I}-\lambda I\Big)d_1^{-1},$$

$$C_2(x)=\Big(\lambda S-\frac{\eta P}{a+S+I}-\gamma\Big)d_2^{-1},\quad C_3(x)=\Big(\delta-\frac{\beta P}{S+I}\Big)d_3^{-1}.$$

由上界估计知，存在正常数 $\bar{C}'(\Lambda,d)$，使得 $\|C_1(x)\|_\infty\le\bar{C}'$, $\|C_2(x)\|_\infty\le\bar{C}'$，且有

$$\begin{cases}\Delta S+C_1(x)S=0, & x\in\Omega,\\ \Delta I+C_2(x)I=0, & x\in\Omega,\\ \partial_\nu S=\partial_\nu I=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

由 Harnack 不等式[3] 得，存在正常数 $C_*'=C_*'(\Lambda,d)$，满足

$$\max_{\bar{\Omega}} S\le C_*'\min_{\bar{\Omega}} S,\quad \max_{\bar{\Omega}} I\le C_*'\min_{\bar{\Omega}} I.$$

P 满足方程

$$\begin{cases}\Delta P+C_3(x)P=0, & x\in\Omega,\\ \partial_\nu P=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

若 $P(x_0)=\max_{\bar{\Omega}} P(x)$，则由极值原理得 $\beta P(x_0)\le\delta(S(x_0)+I(x_0))$. 所以

$$\|C_3\|_\infty=\Big\|\Big(\delta-\frac{\beta P}{S+I}\Big)d_3^{-1}\Big\|_\infty\le\frac{\delta}{d_3}+\frac{\beta}{d_3}\frac{\max_{\bar{\Omega}} P(x)}{\min_{\bar{\Omega}}(S(x)+I(x))}\le\frac{\delta}{d}(1+C_*').$$

从而存在正常数$\bar{C''}(\Lambda,d)$，使得$\|C_3\|_\infty\le\bar{C''}$．由Harnack不等式得，存在正常数$C_*^{''}=C_*^{''}(\Lambda,d)$，使得

$$\max_{\bar\Omega}P\le C_*^{''}\min_{\bar\Omega}P.$$

取$C_*=\max\{C_*^{'},C_*^{''}\}$，从而

$$\max_{\bar\Omega}S\le C_*\min_{\bar\Omega}S,\quad \max_{\bar\Omega}I\le C_*\min_{\bar\Omega}I,\quad \max_{\bar\Omega}P\le C_*\min_{\bar\Omega}P.$$

假设定理结论不成立，可知

$$\max_{\bar\Omega}S<\varepsilon,\quad \max_{\bar\Omega}P<\varepsilon,\quad \forall\,\varepsilon>0.$$

从而存在数列$\{d_{1i},d_{2i},d_{3i}\}_{i=1}^{\infty}$，使得(1)的正解$U_i=(S_i,I_i,P_i)$满足当$i\to\infty$时

$$\max_{\bar\Omega}S_i\to0,\quad \max_{\bar\Omega}P_i\to0.$$

由L_p估计和Sobolev嵌入定理知，$\{S_i,I_i,P_i\}_{i=1}^{\infty}$存在收敛子列，不妨仍记为$\{S_i,I_i,P_i\}_{i=1}^{\infty}$．设$i\to\infty$时，$(S_i,I_i,P_i)\to(\bar S,\bar I,\bar P)$，$(d_{1i},d_{2i},d_{3i})\to(\bar d_1,\bar d_2,\bar d_3)$．由分部积分得

$$\begin{cases}\int_\Omega S_i\big[(1-S_i)-\frac{P_i}{a+S_i+I_i}-\lambda I_i\big]\mathrm{d}x=0,\\ \int_\Omega I_i\big[\lambda S_i-\frac{\eta P_i}{a+S_i+I_i}-\gamma\big]\mathrm{d}x=0,\\ \int_\Omega P_i\big[\delta-\frac{\beta P_i}{S_i+I_i}\big]\mathrm{d}x=0.\end{cases}$$

当$i\to\infty$时，有

$$\begin{cases}\int_\Omega \bar S\big[(1-\bar S)-\frac{\bar P}{a+\bar S+\bar I}-\lambda\bar I\big]\mathrm{d}x=0,\\ \int_\Omega \bar I\big[\lambda\bar S-\frac{\eta\bar P}{a+\bar S+\bar I}-\gamma\big]\mathrm{d}x=0.\end{cases}$$

若$\bar S\equiv0$，则$S_i\to0$．因此存在$i_0>0$，使得$i\ge i_0$时，$S_i<\frac{\gamma}{\lambda}$，从而

$$\lambda S_i-\frac{\eta P_i}{a+S_i+I_i}-\gamma<0,$$

则

$$0=\int_\Omega I_i\Big[\lambda S_i-\frac{\eta P_i}{a+S_i+I_i}-\gamma\Big]\mathrm{d}x<0,$$

矛盾．若$\bar P\equiv0$, $\bar S\ne0$，由极值原理，对任意的$x\in\bar\Omega$, $\bar S>0$．$\bar S$, $\bar I$满足方程

$$\begin{cases}-\bar d_1\triangle\bar S=\bar S[1-\bar S-\lambda\bar I], & x\in\Omega,\\ \partial_\nu\bar S=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

令

$$\bar S(x_0)=\min_{\bar\Omega}\bar S(x)>0,$$

由极值原理得$(1-\bar S-\lambda\bar I)|_{x_0}\le0$，所以$\bar S(x_0)\ge1-\lambda\bar I(x_0)>0$．因$P_i\to0$，所以存在$i_0>0$，使得$i\ge i_0$时

$$P_i<\frac{\delta}{\beta}\Big(1-\lambda\Big(\frac{d_1}{d_2}+\frac{1}{4\gamma}\Big)\Big),$$

从而 $\delta-\frac{\beta P_i}{S_i+I_i}>0$，则

$$\int_\Omega P_i\Big[\delta-\frac{\beta P_i}{S_i+I_i}\Big]\mathrm{d}x>0,$$

矛盾．综上假设不成立，定理得证．

4 非常数解的存在性

定义1 $(\widetilde{d_3},\widetilde{U})\in(0,\infty)\times X$ 是(1)的分歧点，如果对任意的 $\rho\in(0,\widetilde{d_3})$，存在 $d_3\in[\widetilde{d_3}-\rho,\widetilde{d_3}+\rho]$ 使得(1)有非常数正解．否则，称 $(\widetilde{d_3},\widetilde{U})$ 为正则点，其中 X 为Banach空间．

以 $S_p=\{\mu_1,\mu_2,\cdots\}$ 表示 $-\Delta$ 算子在 Ω 上齐次Neumann边界条件下的正特征值．令

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & d_3\end{pmatrix},$$

$$H(d_3;\mu)=\frac{1}{d_1^2d_3}\det\big\{\mu D-G_U(\widetilde{U})\big\},\quad \aleph(d_3)=\big\{\mu>0\,|\,H(d_3;\mu)=0\big\}.$$

定理4 设参数 Λ 满足条件(1)，$d_1=d_2>0$, $\widetilde{d_3}>0$.

(i) 若 $S_p\bigcap\aleph(\widetilde{d_3})=\emptyset$，则 $(\widetilde{d_3},\widetilde{U})$ 为正则点．

(ii) 若 $S_p\bigcap\aleph(\widetilde{d_3})\neq\emptyset$, $H(\widetilde{d_3};\mu)=0$ 的正根是单重的，且

$$a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{13}a_{31}-a_{23}a_{32}>0,\qquad \sum_{\mu_i\in\aleph(\widetilde{d_3})}\dim E(\mu_i)$$

是奇数，则 $(\widetilde{d_3},\widetilde{U})$ 是(1)的分歧点．

证明　令 $V(x)=U(x)-\widetilde{U}$，则(1)等价于

$$\begin{cases}-\Delta V=D^{-1}G(\widetilde{U}+V), & x\in\Omega,\\ \partial_\nu V=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{4}$$

讨论(4)在 $(0,0,0)$ 处所产生的分歧．考察(2)的解等价于考察

$$f(d_3,V)=V-(I-\Delta)^{-1}\big(D^{-1}G(\widetilde{U}+V)+V\big)$$

的零点．ξ 是 $D_Vf(d_3,0)$ 的特征值当且仅当 $\xi(1+\mu_i)$ 是矩阵 $H(d_3;\mu_i)$ 的特征值，且 $D_Vf(d_3,0)$ 实部小于零的特征值的个数为奇数当且仅当 $H(d_3;\mu_i)<0$，参见文献[4]．

(i) $S_p\bigcap\aleph(\widetilde{d_3})=\emptyset$，从而对任意的 $\mu_i>0$，有 $H(\widetilde{d_3};\mu_i)\neq0$, $D_Vf(\widetilde{d_3},0)$ 可逆，又 $f(\widetilde{d_3},0)=0$，由隐函数定理知存在 $\rho>0$，对任意的 $d_3\in[\widetilde{d_3}-\rho,\widetilde{d_3}+\rho]$, $f(d_3,V)=0$，只有 $V=0$ 这一个解．故 $(\widetilde{d_3},0)$ 为正则点，从而 $(\widetilde{d_3},\widetilde{U})$ 为正则点．

(ii) $S_p\bigcap\aleph(\widetilde{d_3})\neq\emptyset$，假设 $(\widetilde{d_3},0)$ 不是分歧点．从而存在 $\rho_1\in(0,\widetilde{d_3})$，使得对任意的 $d_3\in[\widetilde{d_3}-\rho_1,\widetilde{d_3}+\rho_1]$, $V=0$ 是 $f(d_3,V)=0$ 在 B_{ρ_1} 中的唯一解，其中 B_{ρ_1} 为原点的 ρ_1 邻域．存在 ρ_2 充分小，使得对任意的

$$d_3\in[\widetilde{d_3}-\rho_2,\widetilde{d_3})\bigcup(\widetilde{d_3},\widetilde{d_3}+\rho_2],\quad S_p\bigcap\aleph(d_3)=\emptyset.$$

取 $\rho=\min\{\rho_1,\rho_2\}$，在 B_ρ 上，对任意的 $V\in\partial B_\rho$，$f(d_3,V)\neq 0$，从而Leray-Schauder度[5]可定义．同时由同伦不变性知

$$\deg\big(f(d_3,\cdot),B_\rho,0\big)=(-1)^\beta=\text{常数}. \tag{3}$$

若 $\mu_i\notin\aleph(\widetilde{d_3})$，则对任意的 $d_3\in[\widetilde{d_3}-\rho,\widetilde{d_3}+\rho]$，$H(d_3;\mu_i)\neq 0$．由于 ρ 充分小，$H(\widetilde{d_3}-\rho;\mu_i)$ 与 $H(\widetilde{d_3}+\rho;\mu_i)$ 的符号相同，从而 $D_Vf(\widetilde{d_3}-\rho,0)$ 与 $D_Vf(\widetilde{d_3}+\rho,0)$ 负特征值的个数 x_{1i}，y_{1i} 的奇偶性相同，且可知每个负特征值的重数为 $\dim E(\mu_i)$.

若 $\mu_i\in\aleph(\widetilde{d_3})$，则 $H(\widetilde{d_3};\mu_i)=0$，令 $\widetilde{H}(d_3;\mu_i)=d_1^2d_3H(d_3;\mu_i)$，对 $\widetilde{H}(d_3;\mu_i)$ 关于 d_3 求导

$$\frac{\partial\widetilde{H}(d_3;\mu_i)}{\partial d_3}=\frac{a_{33}d_1^2\mu_i^2-d_1(a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{13}a_{31}-a_{23}a_{32})\mu_i-A_3}{d_3}<0.$$

即 $\widetilde{H}(d_3;\mu_i)$ 关于 d_3 单调递减．从而

$$\widetilde{H}(\widetilde{d_3}-\rho;\mu_i)>0,\quad \widetilde{H}(\widetilde{d_3}+\rho;\mu_i)<0.$$

所以

$$H(\widetilde{d_3}-\rho;\mu_i)>0,\quad H(\widetilde{d_3}+\rho;\mu_i)<0.$$

从而 $D_Vf(\widetilde{d_3}-\rho,0)$ 负特征值的个数 x_{2i} 为偶数，每个负特征值的重数为 $\dim E(\mu_i)$；$D_Vf(\widetilde{d_3}+\rho,0)$ 负特征值的个数 y_{2i} 为奇数，每个负特征值的重数为 $\dim E(\mu_i)$．综上

$$\deg\big(f(d_3-\delta,\cdot),B_\rho,0\big)=(-1)^{\sum\limits_{\mu_i\notin\aleph(\widetilde{d_3})}x_{1i}\dim E(\mu_i)+\sum\limits_{\mu_i\in\aleph(\widetilde{d_3})}x_{2i}\dim E(\mu_i)},$$

$$\deg\big(f(d_3+\delta,\cdot),B_\rho,0\big)=(-1)^{\sum\limits_{\mu_i\notin\aleph(\widetilde{d_3})}y_{1i}\dim E(\mu_i)+\sum\limits_{\mu_i\in\aleph(\widetilde{d_3})}y_{2i}\dim E(\mu_i)}.$$

由已知

$$\sum_{\mu_i\in\aleph(\widetilde{d_3})}\dim E(\mu_i)$$

是奇数，结合上述分析知

$$\deg\big(f(d_3-\delta,\cdot),B_\rho,0\big)\neq\deg\big(f(d_3+\delta,\cdot),B_\rho,0\big),$$

这与(3)矛盾，假设不成立，所以 $(\widetilde{d_3},\widetilde{U})$ 是分歧点.

参考文献：

[1] Haque M, Venturino E. The role of transmissible diseases in the Holling-Tanner predator-prey model[J]. Theoretical Population Biology, 2006, 70: 273-288

[2] Lou Y, Ni W M. Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion[J]. Journal of Differential Equations, 1996, 131: 79-131

[3] Lin C S, Ni W M, Takagi I. Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis systems[J]. Journal of Differential Equations, 1998, 72: 1-27

[4] Peng R, Wang M X. Positive steady states of the Holling-tanner prey-predator model with diffusion[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A, Mathematics, 2005, 135: 149-164

[5] 叶其孝，李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京：科学出版社，1990
Ye Q X, Li Z Y. An Introduction with Reaction-diffusion Equation[M]. Beijing: Science Press, 1990

Qualitative Analysis for a General Holling-Tanner Predator-prey Model with Disease Infection

WANG Zhi-guo, LI Bo, WU Jian-hua†

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract: By using the stability theory, the uniform asymptotical stability of the positive constant solution is discussed for a general predator-prey model with diffusion items and disease in the prey. It is shown that there is no non-constant positive solution in some neighborhood of the positive constant solution under certain conditions. In addition, the prior estimate and the existence of the positive steady states are given by using the maximum principle and the bifurcation theory. The result shows the persistence of species can be ensured under certain conditions.

Keywords: asymptotical stability; steady state; bifurcation

Received: 04 Mar 2009. **Accepted:** 21 Apr 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10571115); the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (200807180004); the Shaanxi Provincial Natural Science Foundation for Basic Research (2007A11).

†**Corresponding author:** J. Wu. E-mail address: jianhuaw@snnu.edu.cn